УДК 621.1.016.4(03) + 669.162.23

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ И ТЕРМИЧЕСКОЙ МАССИВНОСТИ ТЕЛ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ АККУМУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Е.В. Торопов[1], Д.К. Волкинд[2]

[1]ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский госуниверситет» (НИУ)
(г. Челябинск, Россия)
[2]ГК «ПЛМ-УРАЛ» – «Делкам-Урал»
(г. Екатеринбург, Россия)

При конструировании и эксплуатации регенераторов и огнеупорного ограждения металлургических агрегатов важное значение для решения вопроса энерго- и ресурсосбережения приобретают аккумуляционные процессы. В работе представлены в обобщенном виде решения уравнения теплопроводности тел трех канонических форм, определены условия наступления регулярного режима, предложены аппроксимации для определения критических чисел подобия и для учета формы тела.
Ключевые слова: *аккумуляция, теплообмен, регулярный режим.*

When constructing regenerators and refractory protections metallurgical units to address the saving of energy and resource the accumulation processes are important. In this paper solutions of the heat equation for bodies of three canonical forms are summarized, defined conditions onset of regular regime are defined, approximation to determine the critical numbers to account body shape are propose.
Keywords: *accumulation, heat exchange, regular mode.*

При конструировании и эксплуатации регенераторов и огнеупорной футеровки металлургических агрегатов для разработки энергосберегающих режимов вопрос определения количества аккумулированной в кладке теплоты приобретает важное значение. В работе [1] отмечены три способа определения расхода теплоты в процессе нагрева тел различной формы и теплофизических свойств. В общем случае при применении закона Фурье расход теплоты определяется интегрированием температурной функции $t_п$ по поверхности элемента и по времени процесса нагрева τ. При известной температуре по объему элемента достаточно интегрирования по объему; при известной интенсивности подвода теплоты α (Вт/м$^2\cdot$К) возможен учет температуры окружающей среды. Для одномерных задач температурное поле является функцией только одной координаты η и времени τ, тогда средняя по объему элемента температура $t_{об}^{ср}$ равна

$$t_{об}^{ср}(\tau)=\frac{\gamma}{\eta^{\gamma}}\int\limits_{\eta=0}^{\eta=\eta_0}\eta^{\gamma-1}t(\eta,\tau)\,d\eta. \qquad (1)$$

Температурная функция под знаком интеграла определяется дифференциальным уравнением теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial t(\eta,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\lambda}{\rho c}\left[\frac{\partial^2 t(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}+\frac{\gamma-1}{\eta}\frac{\partial t(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right]. \qquad (2)$$

В приведенных зависимостях фактор формы $\gamma = 1$ для пластины, $\gamma = 2$ для цилиндра и $\gamma = 3$ для шара; λ, ρ, c – теплопроводность, плотность и теплоемкость материала элемента в согласованной системе единиц. Для получения конкретных температурных зависимостей необходимо к уравнению (2) присоединить условия однозначности – геометрические, теплофизические, начальные и граничные, что позволит решить задачу методом разделения переменных. Решение в безразмерных числах подобия имеет вид:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} D_i C_i \exp\left(-\mu_i^2 \mathrm{Fo}\right). \quad (3)$$

Здесь $\Theta = \left(t_0 - t_{\eta,\tau}\right) / \left(t_0 - t_{\text{нач}}\right)$ – безразмерная температура (температурный фактор) при нагреве элемента от начальной температуры $t_{\text{нач}}$ до температуры t_η, τ при температуре окружающей среды t_0; μ_i – корни характеристических уравнений, т. е. собственные числа краевой задачи; $Fo = \lambda\tau/\rho c$ – число Фурье – безразмерное время процесса нагрева. Параметр D_i отражает влияние на динамику нагрева формы элемента и числа $Bi = \alpha\eta/\lambda$, а также связанных с Bi посредством характеристических уравнений собственных чисел μ_i. Параметр C_i отражает влияние формы элемента, числа Bi и безразмерной координаты рассматриваемой точки $H = \eta/\eta_0$; расчетные формулы для определения D_i и C_i сведены в табл. 1. В зависимостях таблицы, кроме известных тригонометрических функций, также применены табличные функции Бесселя первого рода нулевого порядка J_0 и первого порядка J_1 аргументов μ_i или $\mu_i R$.

Значение основных параметров для решения задачи об аккумуляции теплоты элементами насадки трех форм

Наименование	Пластина, $\eta \equiv x$, $\mu_i = Bi \cdot \mathrm{ctg}\mu_i$	Цилиндр, $\eta \equiv r$, $\mu_i = Bi \cdot J_0(\mu_i) / J_1(\mu_i)$	Шар, $\eta \equiv r$, $\mu_i = (1 - Bi)\mathrm{tg}\mu_i$
Величина D_i	$2\sin\mu_i / (\mu_i + \sin\mu_i \cdot \cos\mu_i)$	$2J_1(\mu_i) / \mu_i[J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i)]$	$2(\sin\mu_i - \mu_i \cdot \cos\mu_i) / (\mu_i - \sin\mu_i \cdot \cos\mu_i)$
Величина C_i	$\cos(\mu_i X)$, где $X = x/x_0$	$J_0(\mu_i R)$, где $R = r/r_0$	$\sin(\mu_i \cdot R) / \mu_i \cdot R$
Величина $C_i^{\text{ср}}$	$sin(\mu_i) / \mu_i$	$2J_1(\mu_i) / \mu_i$	$3Bi / \mu_i$
$\Theta_{\text{нач}}^{\text{пов}}$ при $\eta = 1$	$(\mu_1 + \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1) / 2\sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1$	$\mu_1[J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)] / [2J_1(\mu_1) \cdot J_0(\mu_1)]$	$\mu_1(\mu_1 - \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1) / 2\sin\mu_1 \cdot (\sin\mu_1 - \mu_1 \cdot \cos\mu_1)$
$\Theta_{\text{нач}}^{\text{ось}}$ при $\eta = 0$	$(\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1) / 2\sin\mu_1$	$\mu_1[J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)] / 2J_1(\mu_1)$	$(\mu_1 - \sin\mu_1 \cdot \cos\mu_1) / 2(\sin\mu_1 - \mu_1 \cdot \cos\mu_1)$
D_i и μ_i при $Bi \geq 100$	$\mu_i = (i - 0{,}5)\pi$; $D_i = 4(-1)^{i+1}/[\pi(2i-1)]$	$\mu_i = Bi \cdot J_0(\mu_i) / J_1(\mu_i)$; $D_i = 2 / [\mu_i \cdot J_1(\mu_i)]$	$\mu_i = i\pi$; $i = 1, 2, 3\ldots$ $D_i = 2(-1)^{i+1}$
$Bi_{\text{р}}$ при m	$Ho \cdot \mathrm{tg}(Ho)$	$Ho \cdot J_1(Ho)/J_0(Ho)$	$1 - Ho \cdot \mathrm{ctg}(Ho)$

Сходимость ряда (3), а следовательно, и число слагаемых при заданной точности расчета, определяется формой элемента, заданными условиями однозначности и числом Fo. Обычно на практике принимается, что при $Fo \geq Fo_p$ можно ограничиться только первым слагаемым ряда (3). Для этих условий

$$\Theta_1 = A_1 \exp\left(-\mu_1^2 Fo\right), \tag{4}$$

$$\Theta_{\text{ср}1} = A_1^{\text{ср}} \exp\left(-\mu_1^2 Fo\right), \tag{5}$$

где $A_1 = D_1 \cdot C_1$; $A_1^{\text{ср}} = D_1 \cdot C_1^{\text{ср}}$.

Если в зависимости (3) при $i = 1$ выделить начальный $\theta_{\text{нач}} = t_0 - t_{\text{нач}}$ и текущий $\theta_1 = t_0 - t_{\eta,\tau}$ температурные напоры, то при учете только первого слагаемого суммы можно определить

$$\theta_1 = A_1 \cdot \theta_{\text{нач}} \exp\left(-\mu_1^2 Fo\right), \tag{6}$$

и логарифмированием выделить постоянную часть и часть, зависящую от времени,

$$\ln \theta_1 = -m\tau + \ln A_1 \theta_{\text{нач}} = -m\tau + \text{const}, \tag{7}$$

то, продифференцировав (7) по времени, можно определить темп нагрева m

$$\frac{\partial \ln \theta_1}{\partial \tau} = -m = \frac{1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}. \tag{8}$$

Темп нагрева, таким образом, является относительной скоростью снижения температурного напора от начального значения $\theta_{\text{нач}}$ к текущему значению θ_1, определяемому по зависимости (6). Причем температурный напор как разность температур между греющей средой и какой-либо областью нагреваемого элемента можно конкретизировать либо относительно поверхности элемента, либо относительно его оси. Следует отметить, что индекс 1 в зависимостях (4)–(8) соответствует первому слагаемому ряда (3), поэтому эти зависимости можно применить к любой области элемента. Область существования этих решений называют областью регулярного режима и обычно наступление этого режима определяют по значению числа $Fo \geq Fo_p$.

Как отмечалось в работе [1], возможно создание таких условий однозначности, при которых температурное поле нагреваемого элемента с самого начала процесса будет подчиняться закономерностям регулярного режима. При этом не конкретизировалось, какие условия необходимо для этого создать, и вопрос ограничивался только рассмотрением начальной температуры. Но, как будет показано ниже, согласование начальной температуры необходимо производить с учетом формы элемента, его теплофизических свойств и условий нагрева.

При распространении закономерностей регулярного режима на начало процесса нагрева при $\tau \to 0$ согласно (7) $\ln\theta_1 = \ln A_1\theta_{нач} = 0$, т. е. $A_1\theta_{нач} = 1$ и $\theta_{нач} = 1/A_1$. Это позволяет определить условия начала регулярного режима для любого сечения элемента с координатой $\eta_0 \geq \eta \geq 0$; легко заметить, что координата η входит только в выражение для C_i, и при подстановке $\eta = 0$ для пластины и цилиндра просто получается $\cos_0 = 1$ и $J_0(0) = 1$. Для применения этого же приема в случае шарового элемента необходимо разложить в ряд множитель $\sin(\mu_i x)/x = 1 - x2/3! + x4/5! - x6/7!$, который при $\eta \to 0$ быстро сходится к единице; эти данные приведены в таблице.

В работе [2] утверждается, что число значимых для точности расчетов членов ряда в (3) зависит от значения *Fo*, что не вполне корректно, так как необходимо учитывать и значение числа *Bi*. Сам метод решения дифференциального уравнения теплопроводности разделением переменных предопределяет введение константы разделения, которая связывает пространственные температурные поля с их изменением во времени. Зависимости, выведенные выше для начальных температурных напоров, согласованных с параметрами регулярного режима, включают в качестве основного аргумента собственные числа краевой задачи μ, которые зависят от *Bi*.

Если применить предельный переход для $Bi \to 0$, $\mu \to 0$, то можно определить, что D1 $\to$ 1 и C1 $\to$ 1, а все слагаемые ряда (3) с $i > 1$ стремятся к нулю; характеристические уравнения для $Bi \to 0$ дают $\mu 21 = \gamma \cdot Bi$, где $\gamma = 1, 2, 3$. Тогда решение уравнения (3) упрощается

$$\Theta = \exp\left(-\gamma \cdot Bi \cdot Fo\right), \tag{9}$$

где $Bi \cdot Fo = \alpha\tau/\rho\eta_0 c = \tau/\tau_1$. Выражение $\alpha/\rho\eta_0 c$ – мера тепловой инерции термически тонкого тела, а $\tau_1 = \rho\eta_0 c/\alpha$ – постоянная времени термически тонкого элемента с плотностью ρ, кг/м^3, массовой теплоемкостью *c*, Дж/кг·К, и полутолщиной η_0, м. Постоянная времени (термин из теории колебаний) переходного процесса изменения температурного поля элемента численно равна отрезку времени, за который начальный температурный напор снизится в е = 2,72 раза и составит 0,368 $\theta_{нач}$.

Для другой области $Bi \geq 100$, т. е. области термически массивных элементов, аналогичных простых зависимостей найти не удается. Определенные для этой области собственные числа краевой задачи μ_i и коэффициенты начальных условий D_i приведены в таблице. Фактически при $Bi \geq 100$ процесс переноса теплоты переходит в область граничных условий 1-го рода.

В работе [2] предложено определять связь между темпом нагрева в регулярном режиме *m* и коэффициентом температуропроводности *a* не по коэффициенту формы, а по соотношениям, связывающим *Bi* и *Fo* через число гомохронности $Ho = (m\eta_2/a)0{,}5 = (m\tau/Fo)_{0,5}$. Число *Ho* является не параметром, а аргументом рассматриваемой задачи и характеризует сопоставимость различных отрезков времени по температурным полям, полученным в результате нагрева тел различной формы. Это число определяет правила выбора сходственных моментов времени при адаптации температурных полей в регулярном режиме нагрева с темпом *m*.

В применении к рассматриваемой задаче этот метод не дает возможности описать температурные поля и не определяет пределы наступления регулярного режима по основным характеристикам процесса, но в то же время представляет попытку связать параметры регулярного режима с числами *Bi* и *Fo* или *Ho*. Определив связь *Bi* и *Fo* для конкретной задачи, можно описать общую зависимость θ от этих чисел подобия, но в работе [2] этого нет, как нет и определения расхождений при крайних значениях *Bi* и *Fo*. Обработав численные значения для функции *Ho* = *f*(*Bi*), можно получить аппроксимационную зависимость

$$Ho = 0{,}9Bi^{0{,}38}\exp\left(-0{,}0455Bi\right). \qquad (10)$$

Зависимость (10) свидетельствует о том, что связь между *Ho*, а значит и *Fo*, сложная, экспоненциально-степенная.

В этом отношении более точные данные дают зависимости для различных областей чисел подобия [1], где применена замена переменных $u = Bi\cdot(Fo)0{,}5$ и тогда для малых значений и предложена формула для определения относительной поверхности пластины

$$\theta = e^{u^2} erfc\left(u\right), \qquad (11)$$

где *erfc*(*u*) – табличная функция ошибок, связанная с интегралом вероятности. Для больших значений и рекомендуется формула в виде ряда

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^3} + \ldots\right), \qquad (12)$$

который быстро сходится при увеличении $u > 1{,}0$. Если поставить условием применимости формулы (10) сходимость ряда, то можно определить термин «большие значения *u*», т. е. применимость формулы (11) обеспечивается при значениях $u > 1{,}0$. Простой численный анализ показывает, что при реальных минимальных значениях числа $Bi > 0{,}1$ предел применимости формулы (11) – это $Fo \geq 100$, что редко достигается в процессах металлургической теплотехники. Если принять $Bi \leq 2{,}0$, то $Fo \geq 0{,}25$, что также выходит за пределы заданных параметров.

С учетом этого анализа предлагается расчет температурного поля при нагреве элементов огнеупорной кладки или высокотемпературных регенераторов производить по формулам (3)–(6) для интервала конкретных значений чисел *Bi* и *Fo*. Примененные преобразования позволяют определить по результатам численного анализа аппроксимационные уравнения для коэффициентов перехода от плоской поверхности к цилиндрической и шаровой: $k_{\text{пл-ц}}$ и $k_{\text{пл-ш}}$. Эти коэффициенты определяются по зависимостям

$$k_{\text{пл-ц}} = a - bFo;\ \ k_{\text{пл-ш}} = a_1 + b_1/Fo, \qquad (13)$$

где параметры в уравнениях (12) имеют числовые значения: a = 1,750; 1,519; 1,175 и b = 0,050; 0,104; 0,035 для чисел Bi = 0,10; 1,00; 10,0 соответственно. Далее для перехода от пластины к шару параметры имеют следующие числовые значения a_1 = 1,730; 0,835; 0,966 и b_1 = 1,47; 0,92; 0,17 для тех же значений чисел *Bi*.

Предлагается следующая методика определения количества теплоты, аккумулированной элементом любой формы, и ее практического применения. Производится расчет определяющих чисел подобия *Bi* и *Fo* для реальных значений геометрических и теплофизических свойств элементов; по полученным числам подобия с применением приведенных в таблице соотношений для плоских элементов определяется относительное количество аккумулированной теплоты $Q_{отн}$.

При переходе к элементам другой формы определяются коэффициенты перехода по формулам (13). Полученное значение $Q_{отн}$, характерное для плоского элемента, умножается на соответствующий коэффициент перехода. Возможен также расчет с применением табличных данных для цилиндрических и шаровидных элементов. Так как полученное значение $Q_{отн} = Q_{акк}/Q_{полн}$ составляет долю от полного количества теплоты, которое было бы аккумулировано при нагреве элемента до температуры греющего теплоносителя, т. е. от $t_{нач}$ до t_0, то для получения $Q_{акк}$ необходимо рассчитанное значение $Q_{отн}$ умножить на $Q_{полн} = m_п C_m(t_0 - t_{нач})$, где $m_п$ – полная масса элемента, кг, C_m – массовая теплоемкость материала элемента, кДж/кг·К. Это также позволяет при известном энергетическом КПД процесса нагрева $\eta_{эн}$ определить требуемый для нагрева подвод энергии $Q_{тр} = Q_{акк}/\eta_{эн}$, кДж, а при известном времени процесса нагрева $\tau = \eta_2 Fo/a$, с, и мощность подводимой энергии, $P_э = Q_{тр}/\tau$, кВт.

Список использованных источников

1. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник / А.В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.

2. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.

3. Телегин А.С. Тепло-массоперенос: Учебник для вузов / А.С. Телегин, В.С. Швыдкий, Ю.Г. Ярошенко. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2002. – 455 с.